Introduction élémentaire aux processus déterminantaux

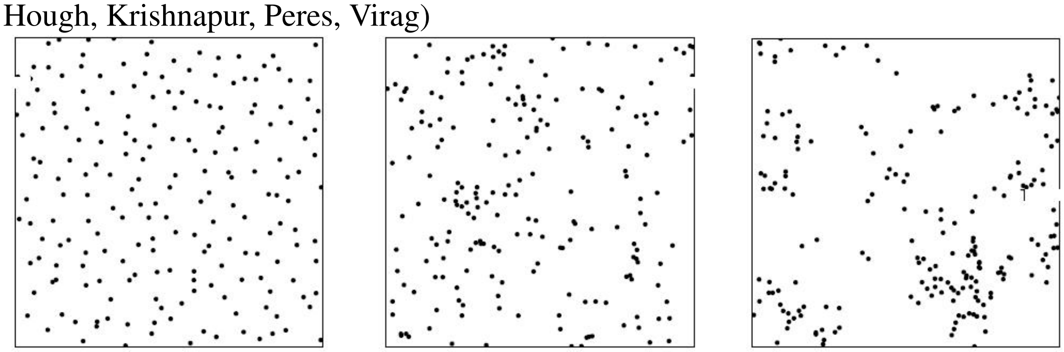
Orateurs: Alexander Bufetov, Pavel Nikitin, Yanqi Qiu

Vendredi, 14h30

La théorie des Processus Ponctuels Déterminantaux est récemment devenue un domaine de recherche extrêmement actif. Cette théorie a été introduite par Odile Macchi en Physique-Mathématique pour modéliser les champs aléatoires des particules de type fermion. Après les années 90, les processus déterminantaux sont devenus un outil important dans divers domaines de recherche comme la théorie des probabilités, combinatoires, représentations etc.

En comparaison avec d'autres processus ponctuels comme les processus de Poisson et les processus permentaux, les processus déterminantaux ont la propriété de répulsion entre les particules. Ceci peut être vu dans la figure suivante:

Figure 1: Échantillons de certains processus ponctuels dans le plan $\mathbb{R}^2$: déterminantal (gauche), Poisson (centre) et permanental (droit). (image due à Hough, Krishnapur, Peres, Virag)



Les processus déterminantaux sont surtout utilisés dans les domaines de recherche suivants :

(1) Comportements asymptotiques des valeurs propres d'une matrice aléatoire GUE : supposons que $X^{(N)} = (X_{ij}^{(N)})_{1 \le i,j \le N}$ est une matrice hermitienne aléatoire telle que $\{X_{ii}, \sqrt{2}\Re X_{ij}, \sqrt{2}\Im X_{ij} : 1 \le i < j \le N\}$ sont des variables i.i.d. et $X_{11} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$. Un théorème classique dans la théorie des matrices aléatoires implique que les valeurs propres de $X^{(N)}$ forment un processus déterminantal sur $\mathbb{R}$. En prennant une certaine limite d'échelle, ces valeurs propres convergent en distribution vers le fameux processus de sinus de Dyson.

(2) En théorie des représentations, diagrammes de Young aléatoires : Soit $\mathbb{Y}_n$ l'ensemble des diagrammes de Young de taille n. Toute diagramme dans $\mathbb{Y}_n$ est paramétrisé par une partition $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge 0)$ de n, telle que $|\lambda| := \sum_i \lambda_i = n$. En tirant les partitions aléatoirement de $\mathbb{Y} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Y}_n$ selon une measure de Plancherel Poissonée:

$$\mathrm{Prob}\{\lambda\} = e^{-\theta^2} \left(\frac{\theta^{|\lambda|} \dim \lambda}{|\lambda|!} \right)^2,$$

où $\dim \lambda$ est la dimension de la représentation irréductible du groupe $S(n)$ correspondant à la partition λ. Alors les coordonnées de Frobenius modifiées $\mathrm{Fr}(\lambda) := \{\lambda_i - i + \frac{1}{2}\}$ deviennent un processus déterminantal sur $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

(3) Les arbres couvrants uniformes dans les graphes : Soit $G = (V, E)$ un graphe fini connexe. En identifiant un sous-graphe avec l'ensemble de ses arêtes, l'arbre choisi aléatoirement selon la loi uniforme dans l'ensemble des arbres couvrants de G devient un processus déterminantal sur E.

(4) L'ensemble des racines d'une fonction holomorphe gaussienne définie sur le disque unité $\mathbb{D}$: Soit $(g_n)_{n \ge 0}$ i.i.d. telle que $g_0 \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$. Alors, presque sûrement, on définit une fonction holomorphe sur le disque par:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n.$$

D'après Peres-Virág, l'ensemble des racines de f est un processus déterminantal dont le noyau de corrélation est le noyau de Bergman.

Nous allons donner une introduction élémentaire à la théorie des processus déterminantaux et introduire quelques résultats récents dans ce domaine. En particulier, dans nos cours, nous envisagerons de parler de l'action quasi-invariante du groupe symétrique infini $S(\infty)$ sur certains processus déterminantaux sur $\mathbb{Z}$.